3 導數的應用

3.8 指數成長與遞減

指數成長與遞減

在自然生態中，許多量的成長或遞減速率都與這個量本身的大小成正比。例如 $y = f(t)$ 代表某種動物或者細菌在時間 t 的數量，而很合理的，其變化率 $f'(t)$ 應與數量 $f(t)$ 成正比，也就是 $f'(t) = kf(t)$ ，其中 k 為常數。

在適當條件下(不受空間/生長環境的限制)， $f'(t) = kf(t)$ 這個數學方程式所給出的模型，的確能在短期內正確地預測 $f(t)$ 的數量。

指數成長與遞減

另一個常見的例子是關於核物理：放射性物質的質量耗散速度與該量成正比。

或者在化學反應中，單一相異分子間的化合反應也會與濃度成正比。

在財務上，存款的數量在複利計算下，其利息的增加速度也會與其數量成正比。

指數成長與遞減

如前所述，一般而言一個物種在時間 t 的數量 y(t) ，其變化率正比於其數量 y(t) 。

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky}$$

其中 k 為常數。

這樣的方程式跟模型一般稱為自然生長律 (law of natural growth, 當 k > 0) 或者自然衰變律 (law of natural decay, 當 k < 0) 。

由於這牽涉到變數 y 跟其微分 y‘(t) ，因此這樣的方程式被稱為微分方程式 (differential equations) 。

指數成長與遞減

這個自然成長律方程的解不難想像：我們可以想的是，哪一種函數的微分剛好是它自己乘上一個倍數？答案就是指數函數。

我們可以寫下指數函數的形式 $y(t) = Ce^{kt}$ 其中 C, k 均為常數，微分後有：

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

指數成長與遞減

因此我們可以知道任意有這樣形式的函數 $y = Ce^{kt}$ ，便會是 $dy/dt = ky$ 的解。另外常數 C 的意義，我們可以從這裡觀察

$$y(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

其便是 y 在 t = 0 的初始值。我們之後會證明這樣的解，在某種意義下會是唯一的解：

定理　微分方程式 dy/dt = ky 的唯一解為以下這樣的指數函數

$$y(t) = y(0)e^{kt}$$

族群數量的成長

族群數量的成長

至於代表變化律跟族群數量的比值，另一個常數 k ，我們把方程式改寫成這樣：

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{or} \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

此時這個常數：

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

成長率除以其族群數量是一個常數 k ，我們特別將其稱為相對成長率 **(relative growth rate)**.

族群數量的成長

從成長率除以族群數量的比值是一個常數的角度來看，與其說族群生長率正比與其族群數量的規模，我們可以改一個說法：這個族群的相對生長率是一個定值。

而此時，對於相對成長率為 k 的族群，其滿足族群成長模型的解為指數函數 Ce^{kt} ，此時的 k 便是指數中時間 t 的係數，表示族群數量對時間的指數成長。

族群數量的成長

舉例說明，考慮這樣的方程式

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

時間 t 的單位為年，相對成長率 $k = 0.02$ ，表示族群數量的 (瞬間) 相對成長率為每年 2% 。

若族群數量在時間 t = 0 時為 P_0 ，則我們可預期的族群數量解為

$$P(t) = P_0e^{0.02t}$$

範例一

世界人口在 1950 年時是 2億5600萬，而在 1960 年時是 3 億 400 萬，試以此數據建立 20 世紀世界人口數量的模型。

(假設族群的生長率正比於族群數量，並不考慮其他因素)

試問相對生長率為何？並利用此模型預測 1993 年以及 2020 年時的世界人口數目。

解:

首先我們以年為時間 t 之單位，並訂 t = 0 代表 1950 年。

另外我們以十萬為人口數目的單位，則有

$$P(0) = 2560$$

$$P(10) = 3040$$

範例一 / 解

根據假設，我們有微分方程式 $dP/dt = Kp$ ，此時我們帶入兩年的數值：

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 2560e^{kt}$$

$$P(10) = 2560e^{10k} = 3040$$

估算得

$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{3040}{2560} \approx 0.017185$$

範例一 / 解

cont'd

因此年相對成長率為 1.7% ，而我們建立起來的模型為

$$P(t) = 2560e^{0.017185t}$$

以此估計 1993 年的人口數量：

$$P(43) = 2560e^{0.017185(43)} \approx 5360\ (\text{十萬})$$

而以此估計 2020 年的人口數量：

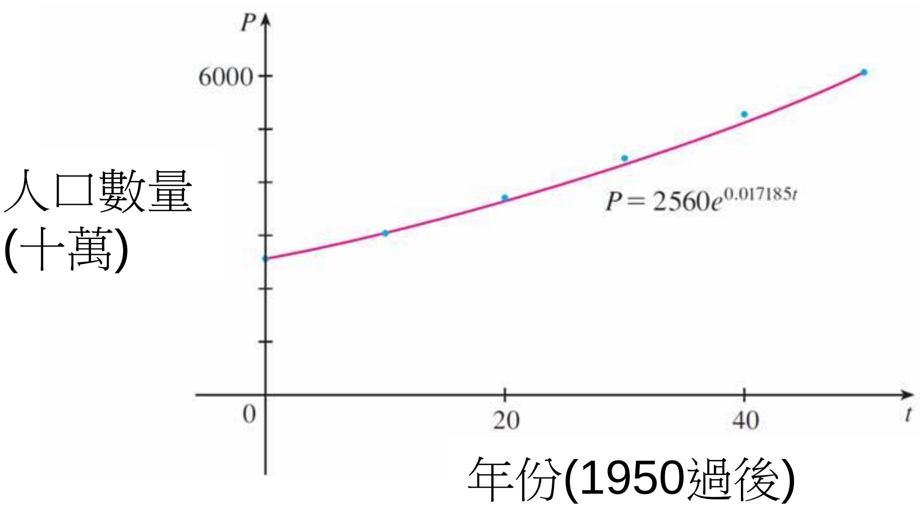
$$P(70) = 2560e^{0.017185(70)} \approx 8524\ (\text{十萬})$$

範例一 / 解

cont'd

下圖一繪出這個模型預估整個二十世紀人口數量的圖形。

另外圖形中的點代表實際的世界人口數目。我們可以發現在 1993 年時，預估數目跟實際數目還算穩合，但到了晚期，甚至到 2020 年，估測的數目便有稍稍偏離。



圖一

輻射物質衰變

輻射物質衰變

輻射物質會自發性衰變。令 m(t) 代表輻射物質自初始質量 m_0 衰變經過時間 t 之後的質量，則其相對衰變速率為

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

也就是， m(t) 滿足方程式，

$$\frac{dm}{dt} = km$$

其中 k 為負常數。

範例二

物理學家常用半衰期的描述來代替物質衰變的速率。

已知鐳-226 的半衰期是 1590 年，試問

(a) 試寫下最初有 100 毫克的鐳-226 在經過 t 年衰變後剩下質量的函數 m(t)

(b) 求 1000 年過後的剩餘質量(四捨五入至最近的整數位毫克)

(c) 何時會衰變剩下 30 毫克?

範例二 / 解

cont'd

由方程式 $dm/dt = km$ 以及初始質量 $m(0) = 100$ ，我們直接帶入通解得到

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

接著我們要利用半衰期求得衰變速率 k ，考慮到經過 1590 年後只剩下一半的質量，因此 m(1590) = 50 ，於是

$$100e^{1590k} = 50 \quad \text{可得} \quad e^{1590k} = \frac{1}{2}$$

取自然對數得到

$$1590k = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

範例二 / 解

cont'd

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

於是我們得到方程式

$$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1590}$$

由於 $e^{\ln 2} = 2$ ，我們可以改寫函數為

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}$$

範例二 / 解

cont’d

(b) 帶入 1000 時可估算 (按計算機)

$$m(1000) = 100e^{-(\ln 2)1000/1590} \approx 65 \text{ mg}$$

(c) 計算當 t 為何時有 $m(t) = 30$ ，即

$$100e^{-(\ln 2)t/1590} = 30 \quad \text{或} \quad e^{-(\ln 2)t/1590} = 0.3$$

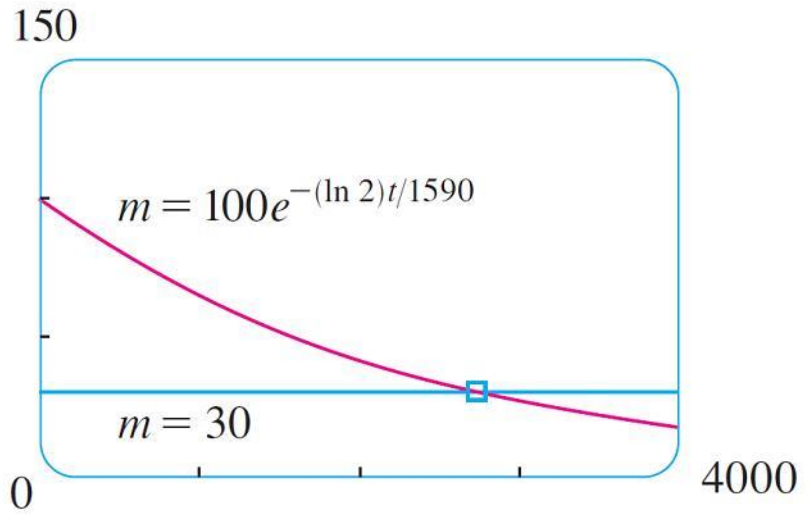
取自然對數，可得到：

$$-\frac{\ln 2}{1590} t = \ln 0.3 \quad \Rightarrow \quad t = -1590 \frac{\ln 0.3}{\ln 2}$$

大約是 2762 年。

輻射物質的衰變

利用繪圖軟體可以劃出 m(t) 的圖形，同時我們也可以去看 m(t) 與水平線 $m = 30$ 的交點，觀察是否吻合前面估算的數值 2762 年。



圖二

牛頓的冷卻定律

牛頓的冷卻定律

關於物體的冷卻，牛頓觀察到：物體冷卻的速率，正比於該物體跟室溫的溫差。（也或者，物體在溫水中加熱的速率。）

我們令 $T(t)$ 表示物體在時間 t 時的溫度， T_s 表示物體所在環境週遭的溫度，則我們可以將此冷卻定律寫成以下的微分方程式

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

其中 k 為一常數。

牛頓的冷卻定律

注意到這個方程式與前面兩個方程式的不同，在於其變化的速率是跟溫差有關，因此多了一個常數 T_s 在裡面。

但我們可以令新的變數 $y(t) = T(t) - T_s$ ，則此時方程式變成

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

於是我們可以利用前面推導的公式解，來計算這個問題。

範例三

將在室溫 72°F 下的一瓶汽水放入溫度為 44°F 的冰箱中，在經過半小時後，汽水的溫度降至 61°F 。試問：

(a) 另外再經過半個小時後，溫度為何？

(b) 汽水需要多少時間才能冷卻到 50°F ？

範例三 / 解

cont'd

(a) 我們假設 T(t) 為經過 t 小時的溫度，冰箱環境溫度 T_s 為 44°F ，根據冷卻定律

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 44)$$

另外定義 $y = T - 44$ ，於是有 $y(0) = 72 - 44 = 28$ ，改寫方程：

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 28$$

根據公式解，我們有

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 28e^{kt}$$

範例三 / 解

根據條件， $T(30) = 61$ ，計算得 $y(30) = 61 – 44 = 17$ ，代入

$$28e^{30k} = 17 \qquad e^{30k} = \frac{17}{28}$$

取自然對數，估計冷卻速率常數：

$$k = \frac{\ln\left(\frac{17}{28}\right)}{30}$$

$$\approx –0.01663$$

範例三 / 解

cont'd

因此

$$y(t) = 28e^{-0.01663t}$$

$$T(t) = 44 + 28e^{-0.01663t}$$

$$T(60) = 44 + 28e^{-0.01663(60)}$$

$$\approx 54.3$$

可之若再經過半個小時，汽水溫度的估計值為 54° F 。

範例三 / 解

(b) 希望 $T(t) = 50$ ，解方程式：

$$44 + 28e^{-0.01663t} = 50$$

$$e^{-0.01663t} = \frac{6}{28}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{6}{28}\right)}{-0.01663}$$

$$\approx 92.6$$

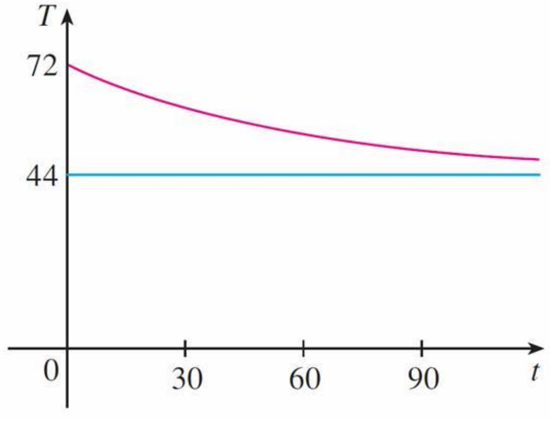
估計再 93 分鐘左右，汽水便會冷卻到 50°F 。

牛頓的冷卻定律

注意到在前例中，當時間 t 趨近無窮大：

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} (44 + 28e^{-0.01663t}) = 44 + 28 \cdot 0 = 44$$

這個結果也就是預期汽水會逐漸趨近到環境溫度 44 °F ，函數圖形如下



圖三

連續複利問題

範例四

假設現在有 1000 元的投資，每年會有 6% 的利息收入，以複利計算。我們可以計算第一年後，這筆投資會成長為

$$1000(1.06) = 1060$$

而第二年後則成長為

$$[1000(1.06)]1.06 = 1123.60$$

更進一步，經過 t 年後，其總值則增加為

$$1000(1.06)^t$$

一般來說，總量為 A_0 的投資，假設獲利率為 r ，則經過 t 年以後這筆投資會增長為

$$A_0(1 + r)^t.$$

範例四

cont'd

若我們將一年分為 n 期，每一期結算一次複利，則此時利率便為 r/n ，而一年過後便剛好是第 n 期結算，第 t 年過後則是第 nt 期結算，則此時這個結算後的值為：

$$A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

舉例說明，年利率為 6% 的投資，三年後的計算結果為：

$\$1000(1.06)^3 = \$1191.02$ ，若每年計算一次複利

$\$1000(1.03)^6 = \$1194.05$ ，若每半年計算一次複利

範例四

cont'd

$\$1000(1.015)^{12} = \$1195.62$ ，若每一季計算一次複利

$\$1000(1.005)^{36} = \$1196.68$ ，若每月計算一次複利

甚至若我們考慮每天計算，則有：

$$\$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365 \cdot 3} = \$1197.20$$

我們觀察到，當複利週期短，結算的次數多，最後獲得的利息會跟著增加。若我們考慮取 $n \to \infty$ ，也就是想像複利的結算是不停連續不斷的計算，則此時第 t 年過後結算的值，便會是以下這個極限

$$A(t) = \lim_{n \to \infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

範例四

cont'd

$$= \lim_{n \to \infty} A_0 \left[\left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n/r} \right]^{rt}$$

$$= A_0 \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n/r} \right]^{rt}$$

$$= A_0 \left[\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{m} \right]^{rt}$$ (其中 $m = n/r$)

其中，中括號 [ ] 內的極限會收斂至自然底數 e 。

範例四

cont'd

於是在連續結算複利的情況下，年利率為 r 經過 t 年複利後的結算值為

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

我們對此函數微分可得

$$\frac{dA}{dt} = rA_0 e^{rt} = rA(t)$$

這個式子的意義也就是說，在連續結算複利的情況下，投資增加的速率會正比於其當下結算的投資額。(錢滾錢!!)

範例四

cont'd

回到先前的範例，若考慮 1000 元在年利率 6% 的情況下，連續時間結算複利，在三年過後這筆投資的錢將會增值到

$$A(3) = \$1000e^{(0.06)3} = \$1197.22$$

注意到雖然仍比每天複利得到的 1197.20 要多，但這個值非常接近。